Aufgabe

Gegeben ist ein Rechteckimpuls und sein Amplitudenspektrum. Das Spektrum umfaßt theoretisch alle Frequenzen, so daß zur exakten Nachbildung des Impulses eine unendlich dichte Abtastung nötig wäre ($T_S \to 0$). Im folgenden sollen nur endliche Spektralanteile berücksichtigt werden, d.h. $\hat{f}$ gemäß *a* bis *c*. Deshalb wird die Rekonstruktion den Rechteckimpuls nur verfälscht widergeben.

1. Berechnen Sie aus der gekennzeichneten obersten Spektralkomponente $\hat{\omega}$ die Abtastperiode T_S und ordnen Sie die Abtastpunkte geeignet an!
2. Schreiben Sie die Samplingreihe für diesen Fall auf!
3. Errechnen Sie Hilfspunkte und zeichnen Sie die rekonstruierte Funktion!

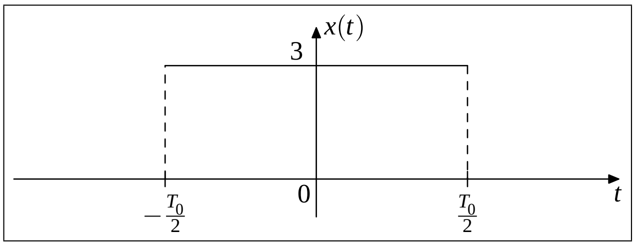

Abbildung 1: Zeitsignal

1 Abtastperiode, Abtastzeitpunkte

Abtastperiode T_S. Zur Bestimmung der Abtastperiode ist das Abtasttheorem von SHANNON zu benutzen. Es besagt, daß die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß sein muß wie die höchste im Signal vorhandene Frequenz, damit eine eineindeutige Transformation desselben durchgeführt werden kann.

Im Fall *a* (siehe Abb. 2) gilt

$$\hat{\omega} = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\hat{f},$$

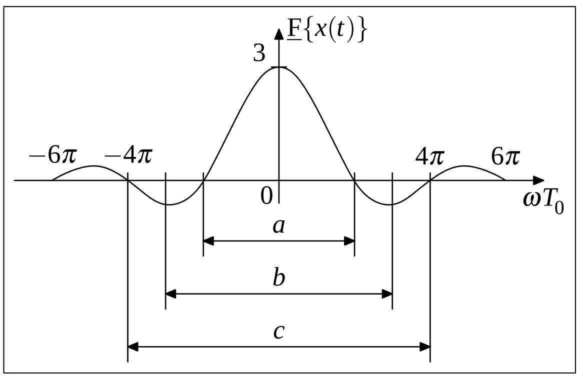

Abbildung 2: FOURIER-Transformierte

$$2\hat{f} = \frac{2}{T_0} \le f_\mathrm{S},$$

$$T_\mathrm{S} = \frac{T_0}{2}.$$

Für Fall *b* ergibt sich

$$\hat{\omega} = \frac{3\pi}{T_0} = 2\pi\hat{f}, \quad T_\mathrm{S} = \frac{T_0}{3}.$$

Schließlich gilt im Fall *c*

$$\hat{\omega} = \frac{4\pi}{T_0} = 2\pi\hat{f}, \quad T_\mathrm{S} = \frac{T_0}{4}.$$

Abtastzeitpunkte kT_S. Bei einem axialsymmetrischen Signal ist es günstig, auch die Abtastpunkte symmetrisch zu $x = 0$ anzuordnen.Für Fall *a* folgt
$x\left(-\frac{3T_0}{4}\right) = 0; \quad x\left(-\frac{T_0}{4}\right) = 3; \quad x\left(\frac{T_0}{4}\right) = 3; \quad x\left(\frac{3T_0}{4}\right) = 0$
Ähnliches gilt in den beiden anderen Fällen. Fall *b*:
$x\left(-\frac{T_0}{3}\right) = 3; \quad x(0) = 3; \quad x\left(\frac{T_0}{3}\right) = 3.$
Letztlich Fall *c*:
$x\left(-\frac{3T_0}{8}\right) = 3; \quad x\left(-\frac{T_0}{8}\right) = 3; \quad x\left(\frac{T_0}{8}\right) = 3; \quad x\left(\frac{3T_0}{8}\right) = 3.$

2 Samplingreihe

Aus einem Satz von Abtastpunkten und unter Einhaltung der Abtastbedingung nach SHANNON läßt sich das ursprüngliche Signal nach KOTELNIKOV und WHITTAKER folgendermaßen wiederherstellen:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_\mathrm{S})\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{t}{T_\mathrm{S}} - k\right)\pi\right\}. \tag{1}$$

Die Samplingreihe für Fall *a* läßt sich nun mit den unter a) bestimmten Abtastpunkten aufschreiben.
$x(t) = 3\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{2t}{T_0} + \frac{1}{2}\right)\pi\right\} + 3\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{2t}{T_0} - \frac{1}{2}\right)\pi\right\}$
Im Fall *b* gilt
$x(t) = 3\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{3t}{T_0} + 1\right)\pi\right\} + 3\,\mathrm{si}\left\{\frac{3t}{T_0}\pi\right\} + 3\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{3t}{T_0} - 1\right)\pi\right\}.$
Und für Fall *c*:
$x(t) = 3\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{4t}{T_0} + \frac{3}{2}\right)\pi\right\} + 3\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{4t}{T_0} + \frac{1}{2}\right)\pi\right\} + 3\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{4t}{T_0} - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} +$
$+3\,\mathrm{si}\left\{\left(\frac{4t}{T_0} - \frac{3}{2}\right)\pi\right\}.$

3 Rekonstruierte Funktionen

Je dichter die Abtastung, desto besser wird die Rechteckfunktion erkennbar. Außerdem sieht man, daß die Kurven durch die eingezeichneten Abtastpunkte verlaufen. Alle drei Funktionsverläufe sind symmetrisch zur y-Achse.

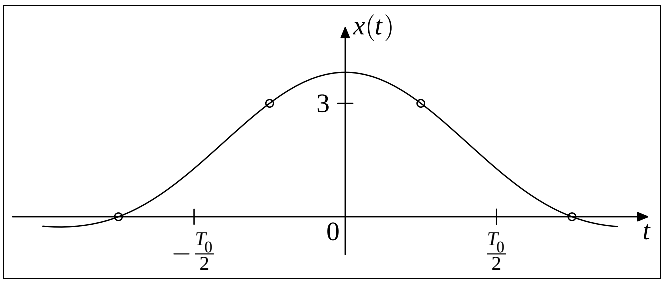

Abbildung 3: Kurve für Fall *a*

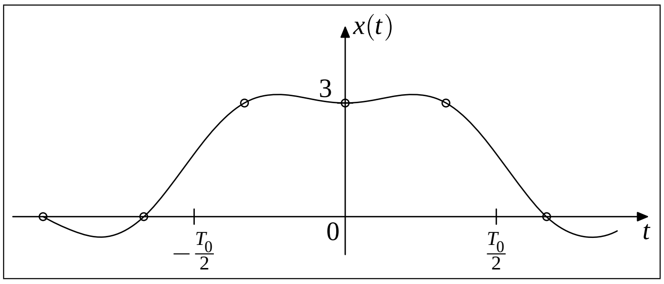

Abbildung 4: Kurve für Fall *b*

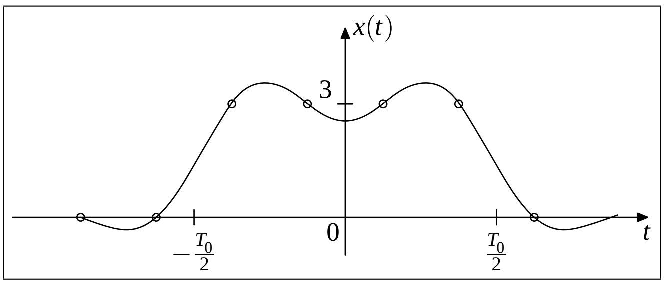

Abbildung 5: Kurve für Fall *c*