Aufgabe

Zwei Schützen, A und B, schießen mehrfach, parallel, aber unterscheidbar auf Wurftauben. A trifft mit 80% Wahrscheinlichkeit, B mit 70%. Das Ergebnis jedes Schußpaares soll als Nachrichtensymbol gelten.

1. Welche Symbole hat diese Quelle; mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf?
2. Berechnen Sie den Informationsgehalt jedes Symbols, die Entropie der Quelle sowie ihre relative Redundanz!
3. Wie müßte die Trefferwahrscheinlichkeit der Schützen sein, damit die Quelle maximale Entropie besitzt?
4. Vergleichen Sie den SHANNON-FANO-Kode für diese Quelle mit einem Kode fester Wortlänge und berechnen Sie für beide Fälle die Koderedundanz!

1 Symbole, Wahrscheinlichkeit

Symbole. Die zwei unabhängigen Ereignisse

$A\ldots$ Schütze A trifft
$B\ldots$ Schütze B trifft

lassen sich zu vier voneinander unabhängigen Ereignissen kombinieren, die als Symbole der Nachrichtenquelle dienen: $A\cap B$, $A\cap\bar{B}$, $\bar{A}\cap B$ und $\bar{A}\cap\bar{B}$.

Wahrscheinlichkeiten. Da die Ereignisse A und B voneinander unabhängig sind, ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Symbole aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$P(A\cap B) = P_1 = P(A)P(B) = 0.8\cdot 0.7 = 0.56$
$P(A\cap\bar{B}) = P_2 = P(A)P(\bar{B}) = 0.8\cdot 0.3 = 0.24$
$P(\bar{A}\cap B) = P_3 = P(\bar{A})P(B) = 0.2\cdot 0.7 = 0.14$
$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P_4 = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0.2\cdot 0.3 = 0.06$

Allgemein gilt:

$$\sum_{k=1}^{K} P_k \stackrel{!}{=} 1 \tag{1}$$

$\sum_{k=1}^{4} P_k = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0.56 + 0.24 + 0.14 + 0.06 = 1$

2 Informationsgehalt, Entropie, Redundanz

Informationsgehalte I_k.

$$I_k = \mathrm{ld}\,\frac{1}{P_k} = -\,\mathrm{ld}\,P_k \quad \text{in bit} \tag{2}$$

Daraus ergeben sich für die einzelnen Symbole folgende Informationsgehalte:

$I_1 = -\,\mathrm{ld}\,P_1 = -\,\mathrm{ld}\,0.56 = 0.8365$ bit
$I_2 = -\,\mathrm{ld}\,P_2 = -\,\mathrm{ld}\,0.24 = 2.0589$ bit
$I_3 = -\,\mathrm{ld}\,P_3 = -\,\mathrm{ld}\,0.14 = 2.8365$ bit
$I_4 = -\,\mathrm{ld}\,P_4 = -\,\mathrm{ld}\,0.06 = 4.0589$ bit

Entropie H.

$$H = \bar{I} = \sum_{k=1}^{K} I_k P_k \quad \text{in bit/Symbol} \tag{3}$$

Daraus folgt für die Quelle

$H = \sum_{k=0}^{4} = I_1 P_1 + I_2 P_2 + I_3 P_3 + I_4 P_4$
$H = 0.8365 \cdot 0.56 + 2.0589 \cdot 0.24 + 2.8365 \cdot 0.14 + 4.0589 \cdot 0.06$
$H = 1.603$ bit/Symbol

Maximale Entropie H_{max}. Die maximale Entropie ergibt sich, wenn alle K Symbole der Quelle gleiche Wahrscheinlichkeiten aufweisen:

$$H_{\text{max}} = \operatorname{ld} K \quad \text{in bit/Symbol} \tag{4}$$

Demnach ist $H_{\text{max}} = \operatorname{ld} 4 = 2$ bit/Symbol

Relative Redundanz r.

$$r = \frac{H_{\text{max}} - H}{H_{\text{max}}} = 1 - \frac{H}{H_{\text{max}}} \tag{5}$$

Für die Nachrichtenquelle ergibt sich folgende Redundanz:

$r = 1 - \frac{1.603}{2} = 1 - 0.8015 = 19.85\%$

3 Maximale Entropie

Die Bedingung für Gleichung (4) lautet:

$P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Longleftrightarrow P(A) = P(B) = 0.5$

4 SHANNON-FANO-Kode, Kode fester Länge

SHANNON-FANO-Kode. Dieser Kode ist ein sogenannter Optimalkode, d. h., er erreicht eine geringe Redundanz. Die Konstruktion des Kodes ist in Tabelle 1 dargestellt.

Ereignis	k	P_k	Kode			l_k (bit)	$l_k P_k$ (bit/Symbol)
$A \cap B$	1	0.56	0			1	0.56
$A \cap \bar{B}$	2	0.24	1	0		2	0.48
$\bar{A} \cap B$	3	0.14		0	0	3	0.42
$\bar{A} \cap \bar{B}$	4	0.06			1	3	0.18

Tabelle 1: SHANNON-FANO-Kode

Mittlere Kodewortlänge L.

$$L = \sum_{k=1}^{K} l_k P_k \quad \text{in bit/Symbol} \tag{6}$$

Für den SHANNON-FANO-Kode ergibt sich:
$\sum_{k=1}^{4} l_k P_k = l_1 P_1 + l_2 P_2 + l_3 P_3 + l_4 P_4 = (0.56 + 0.48 + 0.42 + 0.18)$ bit/Symbol
$L = 1.64$ bit/Symbol

Koderedundanz R_c. Für einen Binärkode gilt $H_c = L$. Daraus folgt für die Redundanz R_c des Kodes:

$$R_c = H_c - H = L - H \quad \text{in bit/Symbol} \tag{7}$$

Die Zahlenwerte eingesetzt:
$R_c = (1.64 - 1.60)$ bit/Symbol $= 0.04$ bit/Symbol

Kode fester Länge. Bei dieser Kodierung haben alle Symbole die gleiche Kodewortlänge. Die Kodetabelle läßt sich dadurch einfacher konstruieren (siehe dazu Tabelle 2).

Ereignis	k	Kode	l_k (bit)
$A \cap B$	1	00	2
$A \cap \overline{B}$	2	01	2
$\overline{A} \cap B$	3	10	2
$\overline{A} \cap \overline{B}$	4	11	2

Tabelle 2: Kode fester Länge

Die mittlere Kodewortlänge L beträgt somit 2 bit/Symbol. Mit Gleichung (7) ergibt sich die Redundanz zu $R_c = (2 - 1.60)$ bit/Symbol $= 0.4$ bit/Symbol.

Wie schon erwähnt, ist die Redundanz des SHANNON-FANO-Kodes geringer als die eines Kodes mit fester Länge. Dafür ist aber der Kodierungsaufwand beim erstgenannten Verfahren höher. Nachteilig ist außerdem, daß eine Folge von Symbolen, die nach SHANNON-FANO kodiert ist, von Anfang an ausgewertet werden muß. Ansonsten ist keine Dekodierung möglich, weil die Kodewörter unterschiedliche Längen aufweisen können.