Aufgabe

Zeigen Sie, daß

$$\sigma_x^2 := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2 ! \tag{1}$$

Welche Vorteile ergeben sich daraus?

Beweis

Der Mittelwert $\bar{x}$ ist definiert durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \tag{2}$$

Nach Auflösen des Binoms in Gleichung (1) erhält man

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - 2\bar{x}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k + \bar{x}^2$$

Die zweite Summe enthält den Term für den Mittelwert aus Gleichung (2). Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \bar{x}^2 \\
\sigma_x^2 &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2
\end{aligned}$$

Vorteile

Es ist kein Vorlauf für $\bar{x}$ nötig, und man kann bei der zur Eingabe gleitenden Berechnung jederzeit aufhören.