Aufgabe

Ein Trägersignal

$$u_\mathrm{T}(t) = \hat{U}_\mathrm{T} \cos(2\pi f_\mathrm{T} t)$$

mit $\hat{U}_\mathrm{T} = 2$ V und $f_\mathrm{T} = 100$ MHz soll durch diese Nachricht

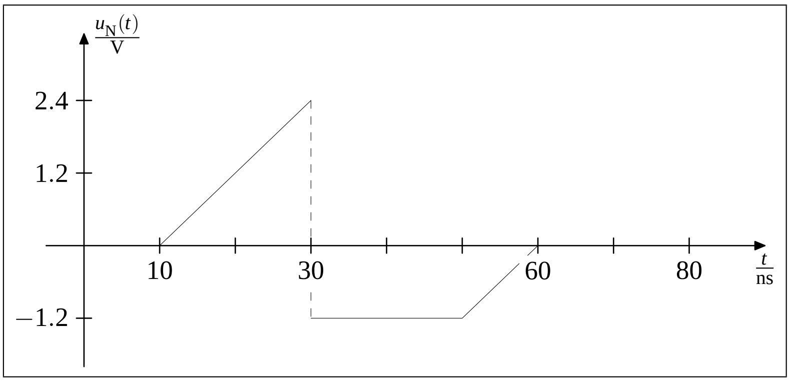

Abbildung 1: Nachrichtensignal

1. mit $k_\mathrm{PM} = \frac{\pi}{2.4\ \mathrm{V}}$ phasenmoduliert und
2. mit $k_\mathrm{FM} = \frac{100\ \mathrm{MHz} \cdot 2\pi}{2.4\ \mathrm{V}} = \frac{\pi}{1.2} \cdot 10^8 \frac{1}{\mathrm{Vs}}$ frequenzmoduliert

werden. Berechnen und zeichnen Sie möglichst maßstabsgetreu für 0 bis 80 ns die Verläufe $u_\mathrm{T}(t)$, $u_\mathrm{PM}(t)$, $u_\mathrm{FM}(t)$ und jeweils $\phi(t)$ und $f(t)$ (ϕ mod 2π)!

1 Phasenmodulation

Für das modulierte Signal gilt allgemein

$$\begin{aligned} u_\mathrm{S}(t) &= \hat{U}_\mathrm{T} \cos\phi(t) && (1) \\ \omega(t) &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} && (2) \\ \phi(t) &= \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,\mathrm{d}t + \phi(t_0). && (3) \end{aligned}$$

Zu beachten ist die Integrationskonstante $\phi(t_0)$ in Gleichung (3), insbesondere bei intervallweiser Betrachtung, da ansonsten Phasensprünge vorgetäuscht werden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \phi(t) &= k_\mathrm{PM} u_\mathrm{N}(t) + 2\pi \int_{t_0}^{t} f_\mathrm{T}\,\mathrm{d}t + \phi(t_0) && (4) \\ \omega(t) &= k_\mathrm{PM} \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{N}(t)}{\mathrm{d}t} + 2\pi f_\mathrm{T}. && (5) \end{aligned}$$

Alle folgenden Gleichungen in diesem Abschnitt sind für t auf ns normiert.

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{\pi}{2.4\ \mathrm{V}} u_\mathrm{N}(t) + 0.2\pi(t - t_0) + \phi(t_0) \\ \frac{f(t)}{\mathrm{MHz}} &= \frac{1000}{4.8\ \mathrm{V}} \cdot \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{N}(t)}{\mathrm{d}t} + 100 \end{aligned}$$

Durch Unterteilung in Intervalle

$I_1 \ldots \quad t \in [0, 10]$
$I_2 \ldots \quad t \in [10, 30)$
$I_3 \ldots \quad t \in (30, 50]$
$I_4 \ldots \quad t \in [50, 60]$
$I_5 \ldots \quad t \in [60, 80]$

ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\frac{u_{\mathrm{N}}(t)}{\mathrm{V}} = \begin{cases} 0 & \forall t \in I_1 \cup I_5 \\ 0.12(t-10) & \forall t \in I_2 \\ -1.2 & \forall t \in I_3 \\ 0.12(t-50)-1.2 & \forall t \in I_4 \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 0.2\pi t & \forall t \in I_1 \\ 0.25\pi(t-10)+2\pi & \forall t \in I_2 \\ 0.2\pi(t-30)+5.5\pi & \forall t \in I_3 \\ 0.25\pi(t-50)+9.5\pi & \forall t \in I_4 \\ 0.2\pi(t-60)+12\pi & \forall t \in I_5 \end{cases}$$

$$\frac{f(t)}{\mathrm{MHz}} = \begin{cases} 100 & \forall t \in I_1 \cup I_3 \cup I_5 \\ 125 & \forall t \in I_2 \cup I_4 \end{cases}$$

Zwischen I_2 und I_3 tritt ein Phasensprung von -1.5π auf. Die entsprechenden Gleichungen für $u_{\mathrm{PM}}(t)$ erhält man durch Einsetzen von $\phi(t)$ in Gleichung (1). Die obigen Zusammenhänge sind in Abbildung 2 grafisch dargestellt.

2 Frequenzmodulation

Es gelten auch hier die ersten drei Gleichungen im Abschnitt Phasenmodulation. Jedoch gilt

$$\omega(t) = k_{\mathrm{FM}} u_{\mathrm{N}}(t) + 2\pi f_{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$$\phi(t) = k_{\mathrm{FM}} \int_{t_0}^{t} u_{\mathrm{N}}(t)\,\mathrm{d}t + 2\pi f_{\mathrm{T}}(t-t_0) + \phi(t_0). \tag{7}$$

Alle folgenden Gleichungen in diesem Abschnitt sind für t auf ns normiert.

$$\frac{f(t)}{\mathrm{MHz}} = \frac{100}{2.4\ \mathrm{V}} u_{\mathrm{N}}(t) + 100$$

$$\phi(t) = \frac{0.2\pi}{2.4\ \mathrm{V}} \int_{t_0}^{t} u_{\mathrm{N}}(t)\,\mathrm{d}t + 0.2\pi(t-t_0) + \phi(t_0)$$

Für die einzelnen Intervalle gelten dann folgende Gleichungen:

$$\frac{f(t)}{\mathrm{MHz}} = \begin{cases} 100 & \forall t \in I_1 \cup I_5 \\ 5(t-10)+100 & \forall t \in I_2 \\ 50 & \forall t \in I_3 \\ 5(t-50)+50 & \forall t \in I_4 \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 0.2\pi t & \forall t \in I_1 \\ 0.005\pi(t-10)^2 + 0.2\pi(t-10)+2\pi & \forall t \in I_2 \\ 0.1\pi(t-30)+8\pi & \forall t \in I_3 \\ 0.005\pi(t-50)^2 + 0.1\pi(t-50)+10.5\pi & \forall t \in I_4 \\ 0.2\pi(t-60)+11.5\pi & \forall t \in I_5 \end{cases}$$

Die entsprechenden Gleichungen für $u_{\mathrm{FM}}(t)$ erhält man durch Einsetzen von $\phi(t)$ in Gleichung (1). Die grafische Veranschaulichung ist in Abbildung 3 zu finden.

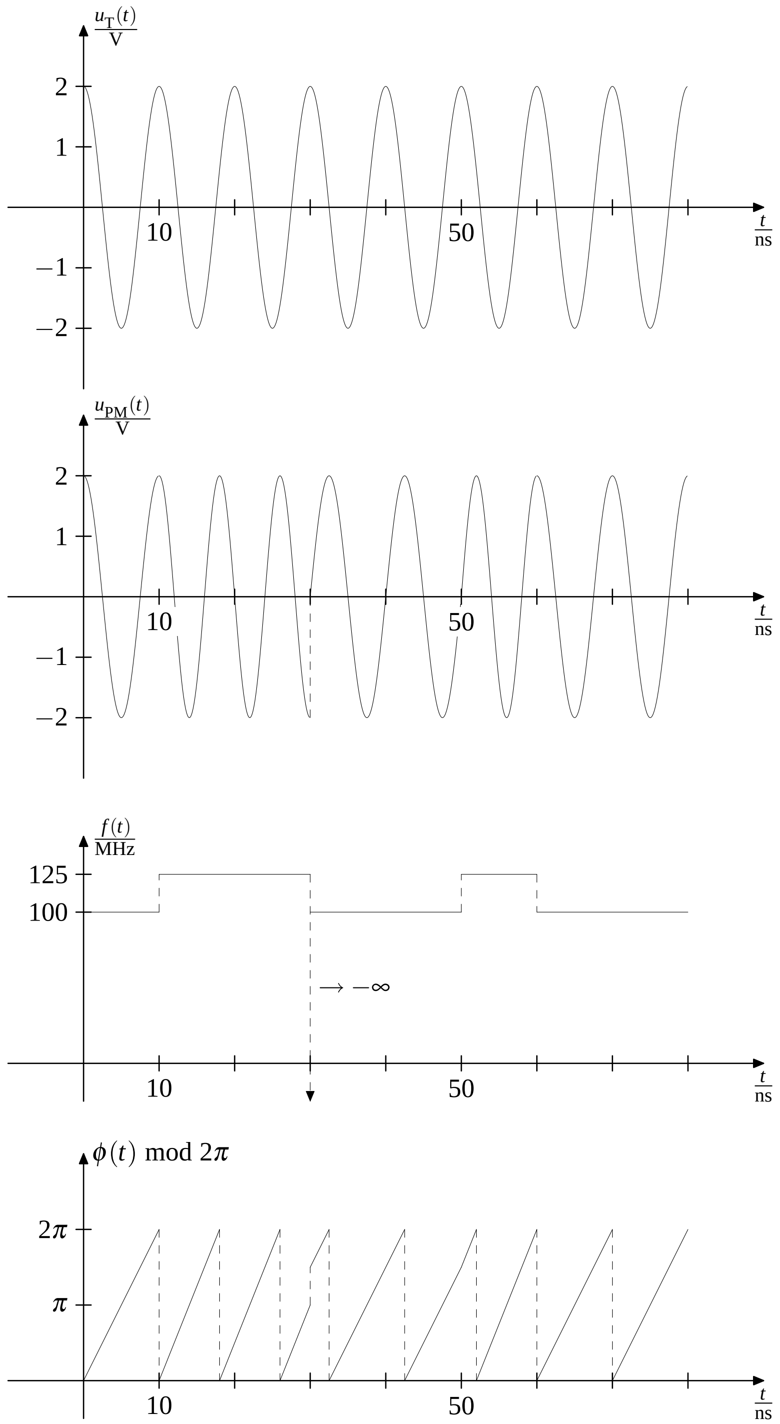

Abbildung 2: Phasenmodulation

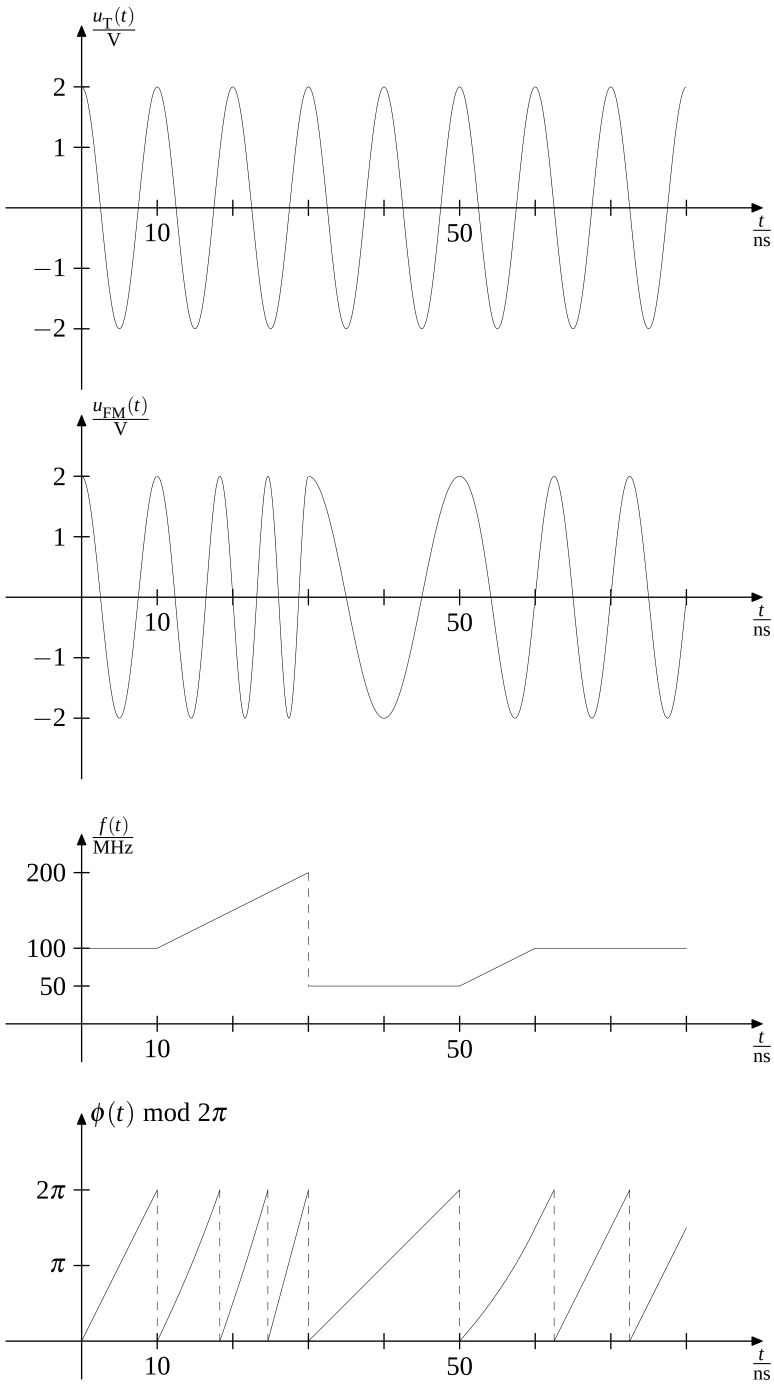

Abbildung 3: Frequenzmodulation