Frequenzspektrum bei Frequenzmodulation

27. April 1998

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung von Prof. Dr.–Ing. Leimer an der HTWK Leipzig (FH) im Fach Nachrichtentechnik II.

$$u_{\mathrm{FM}}(t) = \hat{U}_{\mathrm{T}} \cos[\omega_{\mathrm{T}} t + M \sin(\omega_{\mathrm{N}} t)] \tag{1}$$

Gesucht. FOURIER-Zerlegung dieses Signals, d.h. Darstellung als Summe von Harmonischen mit konstanter Amplitude und Nullphasenwinkel.

Problem. $y = \cos(\sin x)$ entzieht sich unserer gewohnten Vorstellung.

BESSEL-Funktionen. Für unseren Bedarf interessante Formel:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x \sin\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi} \tag{2}$$

$J_n(x) \ldots$ BESSEL–Funktionen n–ter Ordnung eines reellen Argumentes x; ist selbst reell; liegt tabelliert vor (siehe [Wo73]) oder graphisch als Liniendiagramm, auch als Reihenentwicklung ausrechenbar

Gleichung (2) läßt sich mit dem EULERschen Satz

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

auflösen:

$$\cos(x\sin\phi) + \mathrm{j}\sin(x\sin\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(\cos n\phi + \mathrm{j}\sin n\phi)$$

Daraus läßt sich mittels

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

errechnen

$$\cos(x\sin\phi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\phi) \tag{3}$$

$$\sin(x\sin\phi) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin[(2n+1)\phi] \tag{4}$$

$$\cos(x\cos\phi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)\cos(2n\phi) \tag{5}$$

$$\sin(x\cos\phi) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x)\sin[(2n+1)\phi] \tag{6}$$

Daraus läßt sich Gleichung (1) in eine FOURIER-Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned}
u_{\mathrm{FM}}(t) &= \hat{U}_{\mathrm{T}} \cos[\omega_{\mathrm{T}} t + M \sin(\omega_{\mathrm{N}} t)] \\
&= \hat{U}_{\mathrm{T}} [\cos(\omega_{\mathrm{T}} t) + \cos(M \sin(\omega_{\mathrm{N}} t)) - \sin(\omega_{\mathrm{T}} t) \sin(M \sin(\omega_{\mathrm{N}} t))] \\
\text{aus (3)} &= \hat{U}_{\mathrm{T}} J_0(M) \cos(\omega_{\mathrm{T}} t) + 2\hat{U}_{\mathrm{T}} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(M) \cos(\omega_{\mathrm{T}} t) \cos(2n\omega_{\mathrm{N}} t) \\
\text{aus (4)} &\quad -2\hat{U}_{\mathrm{T}} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(M) \sin(\omega_{\mathrm{T}} t) \sin[(2n+1)\omega_{\mathrm{N}} t]
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \\
\sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
u_{\mathrm{FM}}(t) &= \hat{U}_{\mathrm{T}} J_0(M) \cos(\omega_{\mathrm{T}} t) \\
&\quad + \hat{U}_{\mathrm{T}} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(M) [\cos(\omega_{\mathrm{T}} - 2n\omega_{\mathrm{N}})t + \cos(\omega_{\mathrm{T}} + 2n\omega_{\mathrm{N}})t] \qquad (7) \\
&\quad + \hat{U}_{\mathrm{T}} \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(M) [-\cos(\omega_{\mathrm{T}} - (2n+1)\omega_{\mathrm{N}})t \\
&\quad + \cos(\omega_{\mathrm{T}} + (2n+1)\omega_{\mathrm{N}})t]
\end{aligned}$$

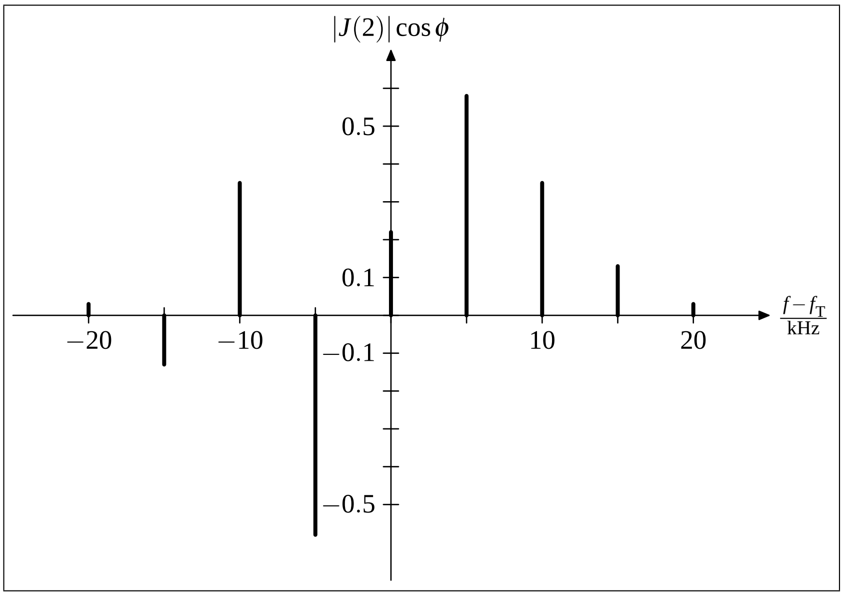
Durch geeignete Aufteilung der Summanden läßt sich Gleichung (7) verkürzen:

$$\begin{aligned}
u_{\mathrm{FM}}(t) &= \hat{U}_{\mathrm{T}} J_0(M) \cos(\omega_{\mathrm{T}} t) \\
&\quad + \hat{U}_{\mathrm{T}} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(M) \cos[(\omega_{\mathrm{T}} + n\omega_{\mathrm{N}})t] \qquad (8) \\
&\quad + \hat{U}_{\mathrm{T}} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(M) (-1)^n \cos[(\omega_{\mathrm{T}} - n\omega_{\mathrm{N}})t]
\end{aligned}$$

Bemerkungen. Die ungeraden Anteile $< \omega_{\mathrm{T}}$ sind negativ $\rightarrow \phi = \pi$. Die relative Höhe der Amplituden wird durch die jeweilige BESSEL-Funktion bestimmt.

Beispiel. Gegeben: $M = 2$ und $f_{\mathrm{N}} = 5$ kHz; gesucht: Skizze des reellen Spektrums, normiert auf $\hat{U}_{\mathrm{T}}$

$\frac{f-f_{\mathrm{T}}}{\mathrm{kHz}}$	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
$\frac{A(f-f_{\mathrm{T}})}{\hat{U}_{\mathrm{T}}}$	0.03	0.13	0.35	0.58	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03
$\phi(f-f_{\mathrm{T}})$	0	π	0	π	0	0	0	0	0



Literatur

[Wo73] Woschni, E.-G.: Informationstechnik. Verlag Technik, Berlin 1973.