Aufgabe

Gegeben sind folgende zwei Signale:

$$x_1(t) = \hat{S}_1 \cos(2\pi f_1 t) \tag{1}$$
$$x_2(t) = \hat{S}_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi) \tag{2}$$

mit
$\hat{S}_1 = 3,\ f_1 = 250$ kHz und
$\hat{S}_2 = 2,\ f_2 = 20$ kHz, $\phi = \frac{\pi}{2}$

1. Die Summe beider Signale soll als (spektrale) FOURIER-Reihe eines Signals angesehen werden:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(2\pi m f_0 t + \phi_m) \tag{3}$$

   Bestimmen Sie A_0, f_0 sowie A_m, ϕ_m für diesen Fall!
2. Zeichnen Sie das Summensignal!

1 Gleichanteil, Harmonische

Gleichanteil $\frac{A_0}{2}$. Der Gleichanteil eines Signales ist definiert durch

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Werden die Gleichungen (1) und (2) addiert, so erhält man das Summensignal $x_\mathrm{S}(t)$. Der Gleichanteil $\bar{X}_\mathrm{S}$ ergibt sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
\bar{X}_\mathrm{S} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [x_1(t) + x_2(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x_1(t)\,\mathrm{d}t}_{0} + \underbrace{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x_2(t)\,\mathrm{d}t}_{0} \\
\bar{X}_\mathrm{S} &= 0
\end{aligned}$$

Da beide Signale harmonische Funktionen sind und deshalb keinen Gleichanteil aufweisen, besitzt auch die Summe keinen Gleichanteil $\Longrightarrow A_0 = 0$.

Harmonische. Zu den zwei Harmonischen f_1 und f_2 muß eine gemeinsame Grundschwingung, die erste Harmonische, gefunden werden. Dazu bestimmt man das kleinste gemeinsame Vielfache von 250 kHz und 20 kHz durch Primfaktorzerlegung.

$250 = 5^3 \cdot 2$
$20 = 5 \cdot 2^2$
$\Longrightarrow f_0 = (2 \cdot 5)$ kHz $= 10$ kHz

Daraus folgen für die Koeffizienten:

f_1 : $m = \frac{250}{10} = 25 \Longrightarrow A_{25} = \hat{S}_1 = 3$ und $\phi_{25} = 0$
f_2 : $m = \frac{20}{10} = 2 \Longrightarrow A_2 = \hat{S}_2 = 2$ und $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$

Für alle anderen m gilt: $A_m = 0$ und $\phi_m = 0$.

2 Summensignal

Das Summensignal läßt sich bezüglich Gleichung (3) folgendermaßen ausdrücken:

$x_{\mathrm{S}}(t) = 2\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10\ \mathrm{kHz} \cdot t + \frac{\pi}{2}) + 3\cos(2\pi \cdot 25 \cdot 10\ \mathrm{kHz} \cdot t)$

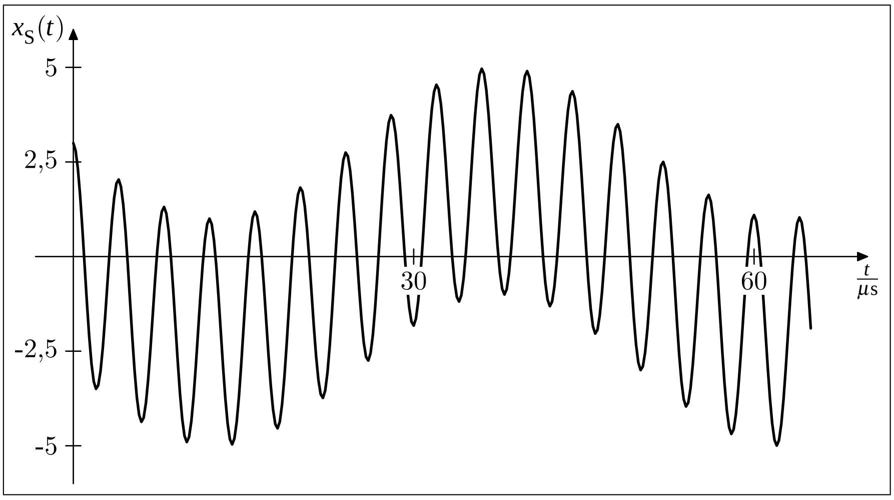

Abbildung 1: Summensignal $x_{\mathrm{S}}(t)$

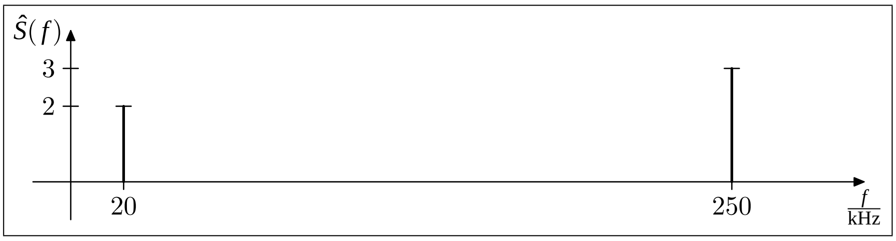

Abbildung 2: Amplitudenspektrum von $x_{\mathrm{S}}(t)$

Abbildung 3: Phasenspektrum von $x_{\mathrm{S}}(t)$