



Aufgabe

Berechnen Sie den Erwartungswert $\bar{x} = E\{X\}$

- aus den Werten $x(k=21) \dots x(k=120)$ der rekursiven (determiniert chaotischen) Abbildung $x(k+1) = |\ln x(k)|$!
- aus den Werten $x(k_1=3)$ von 100 Realisierungen dieser Abbildung, die sich durch einen jeweils willkürlich aus $[0;5]$ gewählten Startwert unterscheiden!

Ist diese Abbildung eine ergodische Zufallsquelle?

a) gleicher Startwert

Ich habe für dieses Problem ein kleines C-Programm geschrieben, dessen Quellcode am Ende abgedruckt ist. Dieses Programm erwartet in seinem ersten Teil eine Eingabe eines Startwertes. Daraufhin werden 120 Werte berechnet, von denen die letzten 100 im \LaTeX -Format in die Datei `a.txt` geschrieben werden. Dadurch entsteht Tabelle 1.

k	$x(k)$	k	$x(k)$	k	$x(k)$	k	$x(k)$
21	0.566	22	0.569	23	0.564	24	0.573
25	0.557	26	0.585	27	0.537	28	0.622
29	0.475	30	0.745	31	0.295	32	1.222
33	0.201	34	1.605	35	0.473	36	0.748
37	0.290	38	1.237	39	0.212	40	1.549
41	0.438	42	0.826	43	0.191	44	1.653
45	0.503	46	0.688	47	0.374	48	0.983
49	0.017	50	4.075	51	1.405	52	0.340
53	1.079	54	0.076	55	2.577	56	0.947
57	0.055	58	2.903	59	1.066	60	0.064
61	2.752	62	1.012	63	0.012	64	4.411
65	1.484	66	0.395	67	0.929	68	0.073
69	2.612	70	0.960	71	0.041	72	3.200
73	1.163	74	0.151	75	1.890	76	0.637
77	0.451	78	0.795	79	0.229	80	1.474
81	0.388	82	0.947	83	0.055	84	2.901
85	1.065	86	0.063	87	2.763	88	1.016
89	0.016	90	4.115	91	1.415	92	0.347
93	1.059	94	0.057	95	2.861	96	1.051
97	0.050	98	2.996	99	1.097	100	0.093
101	2.376	102	0.865	103	0.145	104	1.934
105	0.660	106	0.416	107	0.878	108	0.131
109	2.035	110	0.711	111	0.342	112	1.074
113	0.072	114	2.637	115	0.970	116	0.031
117	3.483	118	1.248	119	0.221	120	1.508

Tabelle 1: Startwert = 1.5

Bei diesen 100 Werten ergibt sich als Summe 104.649. Der Mittelwert beträgt also 1.05.

i	$x(k_1)$	i	$x(k_1)$	i	$x(k_1)$	i	$x(k_1)$
1	0.110	2	1.486	3	1.906	4	0.945
5	0.819	6	0.783	7	1.114	8	1.296
9	0.825	10	0.801	11	0.442	12	1.257
13	0.638	14	1.519	15	1.835	16	1.430
17	0.870	18	1.650	19	1.061	20	1.271
21	0.458	22	1.275	23	0.155	24	0.125
25	0.070	26	1.056	27	1.641	28	0.811
29	1.123	30	0.798	31	2.164	32	0.477
33	2.561	34	0.379	35	0.928	36	0.317
37	1.995	38	0.138	39	1.209	40	3.028
41	1.692	42	0.918	43	2.044	44	1.217
45	0.410	46	1.304	47	0.974	48	1.392
49	4.493	50	1.586	51	1.888	52	0.915
53	1.353	54	1.294	55	1.180	56	1.545
57	3.086	58	0.962	59	1.005	60	1.180
61	0.478	62	0.027	63	0.360	64	0.310
65	0.223	66	0.440	67	0.531	68	0.905
69	0.601	70	0.438	71	1.797	72	1.173
73	0.212	74	1.439	75	1.024	76	0.466
77	0.915	78	1.503	79	1.837	80	1.338
81	0.812	82	4.047	83	2.047	84	1.085
85	0.088	86	1.075	87	0.275	88	0.997
89	1.587	90	1.719	91	1.999	92	0.851
93	1.626	94	1.276	95	0.411	96	0.825
97	1.604	98	2.396	99	1.024	100	1.496

Tabelle 2: zufällige Startwerte

b) zufälliger Startwert

Der zweite Programmteil arbeitet mit der Zufallsfunktion `int random(void)`. Dahinter verbirgt sich (wahrscheinlich) ein Pseudozufallsgenerator, der mit `void srandom(int)` initialisiert werden muß.

Nach dem Addieren aller Werte erhält man als Summe 116.461. Daraus ergibt sich der Mittelwert zu 1.16.

Fazit

Eine theoretische Zufallsquelle kann Werte im Intervall $(-\infty, \infty)$ erzeugen. Die betrachtete Quelle ergab Mittelwerte von 1.05 und 1.16. In Anbetracht des möglichen Intervalls und jeweils „nur“ 100 Auswertungen, liegen diese beiden Werte ziemlich nahe beieinander, so daß man diese Zufallsquelle durchaus als ergodisch ansehen kann.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <limits.h>
```

```
int
main (int argc, char **argv)
{
    int i, j, anzahl=0;
    float start;
    double xalt, xneu, summe=0;
    FILE *a = fopen("a.txt", "wt");
    FILE *b = fopen("b.txt", "wt");
    FILE *mw = fopen("mw.txt", "wt");

    printf("Startwert eingeben: ");
    scanf("%f", &start);
    xalt = start;
    for (i = 1; i < 21; i++)
    {
        xneu = fabs(log(xalt));
        xalt = xneu;
    }
    for (i = 21; i < 121; i++)
    {
        xneu = fabs(log(xalt));
        summe += xneu;
        anzahl++;
        xalt = xneu;
        if (fmod(anzahl, 4) != 0) fprintf(a, "%d & %5.3f & ", i, xneu);
        else fprintf(a, "%d & %5.3f\\\\\\\\\\n", i, xneu);
    }
    fprintf(mw, "Summe = %5.3f; Anzahl = %d\\n", summe, anzahl);

    printf("Initialisierungswert eingeben: ");
    scanf("%d", &i);
    srandom(i);
    anzahl = summe = 0;
    for (i = 1; i < 101; i++)
    {
        xalt = random() * 5. / INT_MAX;
        for (j = 1; j < 4; j++)
        {
            xneu = fabs(log(xalt));
            xalt = xneu;
        }
        summe += xneu;
        anzahl++;
        if (fmod(anzahl, 4) != 0) fprintf(b, "%d & %5.3f & ", i, xneu);
        else fprintf(b, "%d & %5.3f\\\\\\\\\\n", i, xneu);
    }
    fprintf(mw, "Summe = %5.3f; Anzahl = %d\\n", summe, anzahl);
    fclose(a);
    fclose(b);
    fclose(mw);
    return 0;
}
```