



### Aufgabe

Eine MARKOV-Quelle erster Ordnung besitze ein dreiwertiges Alphabet und die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\underline{P}(j|i) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

1. Zeichnen Sie den Graphen der Quelle!
2. Berechnen Sie die genäherten  $P(i)$  per MARKOV-Kette bis  $k = 12$ !
3. Berechnen Sie allgemein und mit Zahlenwerten die  $P(i)$  für den eingeschwungenen Fall!
4. Berechnen Sie die Übergangsentropien der Symbole und die Entropie der Quelle!

## 1 Graph

Der Einfachheit halber bezeichne ich die Elemente der Matrix im folgenden mit

$$\alpha_{ij} := P(j|i). \quad (1)$$

Die Knoten des Graphen geben die Zustände und die Kanten zwischen den Knoten die Übergangswahrscheinlichkeiten an.

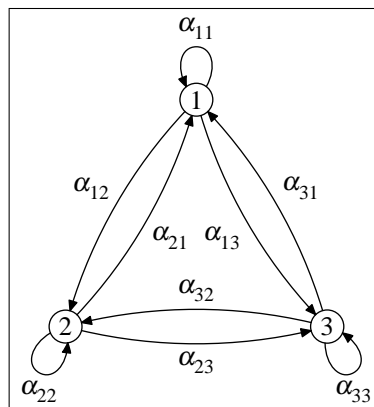


Abbildung 1: Graph der Quelle

## 2 MARKOV-Kette

Aus den Übergangswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände läßt sich durch Iteration in Gesamtschritten die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes  $P(j)$  selbst bestimmen. Die Gleichung dazu lautet:

$$\underline{P}_{k+1} = \underline{P}^T(j|i) \cdot \underline{P}_k \quad (2)$$

Es ist  $\underline{P}$  der Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten und  $\underline{P}^T(j|i)$  die transponierte Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten. Die Ausgabe eines Computerprogramms ist in Tabelle 1 zu sehen. Man sieht, daß die Wahrscheinlichkeiten gegen Grenzwerte konvergieren.

$k$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$
0	1.0000	0.0000	0.0000
1	0.4000	0.3000	0.3000
2	0.4900	0.3300	0.1800
3	0.5140	0.2880	0.1980
4	0.4954	0.3018	0.2028
5	0.5004	0.3005	0.1991
6	0.5003	0.2996	0.2001
7	0.4998	0.3001	0.2001
8	0.5000	0.3000	0.2000
9	0.5000	0.3000	0.2000
10	0.5000	0.3000	0.2000
11	0.5000	0.3000	0.2000
12	0.5000	0.3000	0.2000

Tabelle 1: Zustandswahrscheinlichkeiten

### 3 Algebraische Lösung

Aus der Gleichung (2) und der Normierungsbedingung lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen.

$$1 = P(1) + P(2) + P(3) \quad (3)$$

$$P(1) = \alpha_{11}P(1) + \alpha_{21}P(2) + \alpha_{31}P(3) \quad (4)$$

$$P(2) = \alpha_{12}P(1) + \alpha_{22}P(2) + \alpha_{32}P(3) \quad (5)$$

Durch Umstellen der Gleichung (3) nach  $P(3)$  und Einsetzen in die beiden anderen Gleichungen erhält man

$$P(2) = \frac{P(1)(\alpha_{12} - \alpha_{32}) + \alpha_{32}}{1 - \alpha_{22} + \alpha_{32}}$$

und schließlich

$$P(1) = \frac{\alpha_{31}(1 - \alpha_{22}) + \alpha_{21}\alpha_{32}}{N}$$

mit

$$N = 2 - \alpha_{11}(1 - \alpha_{22} + \alpha_{32}) - \alpha_{22}(1 + \alpha_{31}) - \alpha_{33} + \alpha_{12}(\alpha_{31} - \alpha_{21}) + \alpha_{21}\alpha_{32}$$

Die beiden anderen Zustandswahrscheinlichkeiten ergeben sich zu

$$P(2) = \frac{\alpha_{32}(1 - \alpha_{11}) + \alpha_{12}\alpha_{31}}{N}$$

$$P(3) = \frac{1 - \alpha_{11}(1 - \alpha_{22}) - \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{22}}{N}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich  $N = 1.5$  und somit

$$P(1) = 0.5$$

$$P(2) = 0.3$$

$$P(3) = 0.2$$

## 4 Entropien

Die Entropie einer MARKOV-Quelle ist definiert durch

$$H = \sum_{i=1}^I P(i) H(i) \quad \text{in bit/Symbol} \quad (6)$$

mit

$$H(i) = - \sum_{j=1}^I P(j|i) \lg P(j|i) \quad \text{in bit/Symbol.} \quad (7)$$

Die Zahlenwerte eingesetzt ergibt:

$$H(1) = -0.4 \lg 0.4 - 2 \cdot 0.3 \lg 0.3 = 1.57 \text{ bit/Symbol}$$

$$H(2) = -0.8 \lg 0.8 - 2 \cdot 0.1 \lg 0.1 = 0.92 \text{ bit/Symbol}$$

$$H(3) = -0.3 \lg 0.3 - 0.6 \lg 0.6 - 0.1 \lg 0.1 = 1.30 \text{ bit/Symbol}$$

$$H = (0.5 \cdot 1.57 + 0.3 \cdot 0.92 + 0.2 \cdot 1.30) \text{ bit/Symbol} = 1.32 \text{ bit/Symbol}$$

---

```
#include <stdio.h>
```

```
int
```

```
main ()
```

```
{
```

```
    int i;
```

```
    double Palt[3] = {1, 0, 0}, Pneu[3];
```

```
    const double PT[3][3] = {{0.4, 0.8, 0.3}, {0.3, 0.1, 0.6}, {0.3, 0.1, 0.1}};
```

```
    FILE *f_p = fopen("P.txt", "wt");
```

```
    for (i=0; i<=12; i++)
```

```
    {
```

```
        fprintf(f_p, "%d&%.4f&%.4f&%.4f\\n", i, Palt[0], Palt[1], Palt[2]);
```

```
        Pneu[0] = Palt[0]*PT[0][0] + Palt[1]*PT[0][1] + Palt[2]*PT[0][2];
```

```
        Pneu[1] = Palt[0]*PT[1][0] + Palt[1]*PT[1][1] + Palt[2]*PT[1][2];
```

```
        Pneu[2] = Palt[0]*PT[2][0] + Palt[1]*PT[2][1] + Palt[2]*PT[2][2];
```

```
        Palt[0] = Pneu[0];
```

```
        Palt[1] = Pneu[1];
```

```
        Palt[2] = Pneu[2];
```

```
    }
```

```
    return 0;
```

```
}
```

---

10

20