



Aufgabe

Ein spannungsgesteuerter Oszillator (VCO) schwingt im Freilauf (Steuerspannung $\bar{u}_M = 0$) mit

$$u_{T_0}(t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 500 \text{ kHz} \cdot t)$$

und ändert seine Frequenz im Bereich $f_T = 350 \dots 650 \text{ kHz}$ linear mit

$$k_O = \frac{\Delta f_T}{\bar{u}_M} = 25 \frac{\text{kHz}}{\text{V}}.$$

Er werde durch ein Signal

$$\bar{u}_M(t) = 3 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 15 \text{ kHz} \cdot t)$$

angesteuert.

1. Gesucht ist der Modulationsindex M von $u_T(t)$.
2. Welche praktisch abgeschätzte Bandbreite beansprucht dieses FM-Signal, wenn nur Anteile $> 10\%$ übertragen werden sollen?
3. Geben Sie in einer Tabelle absolute Frequenzlage und relative Amplitude aller bei b) zu berücksichtigenden Spektralkomponenten an!

1 Modulationsindex

Der Modulationsindex ist definiert durch

$$M = \frac{\widehat{\Delta \omega_T}}{\omega_N} = \frac{\widehat{\Delta f_T}}{f_N} = \frac{k_O \hat{U}_N}{f_N}. \quad (1)$$

Die gegebenen Werte eingesetzt ergibt

$$M = \frac{25 \text{ kHz} \cdot 3 \text{ V}}{\text{V} \cdot 15 \text{ kHz}} = 5.$$

Es ist insbesondere zu beachten, daß man im linearen Ansteuerbereich des VCO bleibt.

In unserem Fall ändert sich die Frequenz im Bereich

$$\Delta f_T = 500 \text{ kHz} \pm 3 \text{ V} \cdot 25 \text{ kHz} = 425 \dots 575 \text{ kHz},$$

was noch im o.g. zulässigen Intervall liegt.

2 Bandbreitebedarf

Ein frequenzmoduliertes Signal läßt sich im Zeitbereich mit Hilfe von BESSEL-Funktionen darstellen.

$$\begin{aligned} u_{\text{FM}}(t) &= \hat{U}_T J_0(M) \cos(2\pi f_T t) \\ &+ \hat{U}_T \sum_{n=1}^{\infty} J_n(M) \cos[2\pi(f_T + n f_N)t] \\ &+ \hat{U}_T \sum_{n=1}^{\infty} J_n(M) (-1)^n \cos[2\pi(f_T - n f_N)t] \end{aligned} \quad (2)$$

In unserem Fall ist $M = 5$. Der Anteil einer Spektralkomponente wird durch die jeweilige BESSEL-Funktion bestimmt. Es existiert die Reihenentwicklung

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}. \quad (3)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$J_n(5)$	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05

Tabelle 1: Funktionswerte für $n = 0 \dots 7$

In [Wo73] ist eine Tabelle zu finden, in der für ganzzahlige n die Funktionswerte aufgeführt sind. Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 1 abgedruckt. Für $n > 6$ ist $|J_n(x)| < 0.1$. Der Bandbreitebedarf ergibt sich also zu

$$B_{f_{10\%}} = (f_T + nf_N) - (f_T - nf_N) = 2nf_N = 2 \cdot 6 \cdot 15 \text{ kHz} = 180 \text{ kHz}.$$

Dieses Ergebnis stimmt genau mit der Näherungsformel

$$B_{f_{10\%}} = 2f_N(M + 1)$$

überein.

3 Spektralkomponenten

Die relativen Amplituden und Phasenlagen der einzelnen Frequenzen des Gesamtsignals lassen sich durch Gleichung (2) und Tabelle 1 ermitteln. Negative Vorzeichen werden durch eine Phasenverschiebung um π ausgedrückt. Das Ergebnis ist in Tabelle 2 zu sehen. In Abbildung 1 sind die vorzeichenbehafteten, relativen Amplituden der

f (kHz)	$A(f)$ (2 V)	$\phi(f)$	f (kHz)	$A(f)$ (2 V)	$\phi(f)$
500	0.18	π	485	0.33	0
515	0.33	π	470	0.05	0
530	0.05	0	455	0.36	π
545	0.36	0	440	0.39	0
560	0.39	0	425	0.26	π
575	0.26	0	410	0.13	0
590	0.13	0			

Tabelle 2: Spektralkomponenten

Spektralanteile über der Frequenz aufgetragen.

Literatur

[Wo73] Woschni, E.-G.: Informationstechnik. Verlag Technik, Berlin 1973.

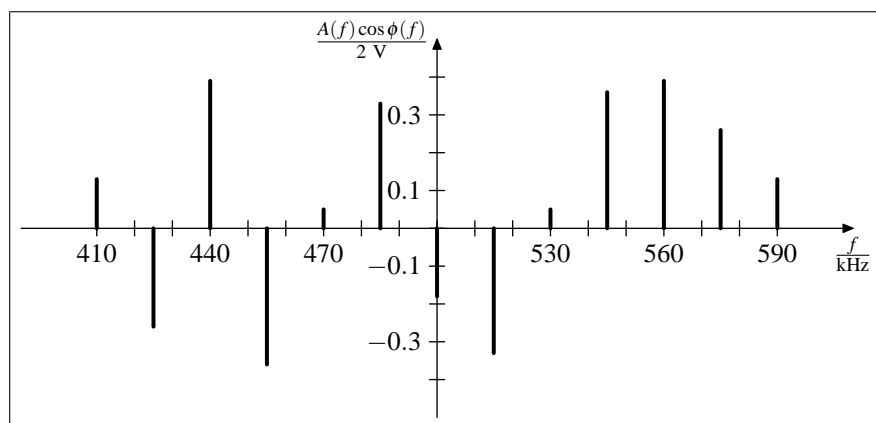


Abbildung 1: Diagramm der Spektralkomponenten